Adı Soyadı: 21.11.2019
Numarası:

2019-2020 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I ARASINAV SORULARI

1) a) Q_8 kuaterniyonlar grubunun bütün elemanlarının mertebelerini bulunuz.

   b) Alterne grup nedir? Tanımlayınız ve A_8 alterne grubunun mertebesi 4 olan bir alt grubunu yazınız.

2) S_9 da grup $\alpha=(15)(8647)(39)$ ve $\beta=(3146782)(59)(738)$ permütasyonları veriliyor.

   a) $\alpha\beta\alpha^{-1}$ permütasyonunu bulunuz.

   b) $o(\alpha)$, $o(\beta)$ ve $o(\alpha.\beta)$ yı bulunuz.

3) a) 437 ve 8664 sayılarının ebobunu Öklid algoritması yoluyla bulunuz ve bu sayıların ebobu d olmak üzere $d=437x+8664y$ olacak şekilde x, y tamsayılarını hesaplayınız.

   b) 82^{8285} sayısının 51 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

4) a) $(G,*)$ sonlu yarı grubunda sağdan ve soldan kısaltma özelliği sağlanıyorsa $(G,*)$ ikilisinin grup olduğunu gösteriniz.

   b) $(G,.)$ bir grup $o(a)=n$ olsun. Her $t\in\mathbb{Z}^+$ için $o(a^t)=\dfrac{o(a)}{(o(a),t)}$ olduğunu gösteriniz.

5) a) $a\equiv a_1\,(m)$ ve $b\equiv b_1\,(m)$ ise $a.b\equiv a_1.b_1\,(m)$ olduğunu gösteriniz.

   b) $a,b,m\in\mathbb{Z}^+$ ve $(a,m)=(b,m)=1$ ise $(ab,m)=1$ olduğunu gösteriniz.

NOT: Sınav süresi 100 dakika olup soruların her biri eşit puanlıdır. İstediğiniz sorudan başlayabilirsiniz. Sınav kağıdına cevaplama yapmayınız. Ek kağıt verilecektir.

BAŞARILAR

Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1) a) $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca burada $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ dir ve $ij = k$, $j \cdot i = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$ ve $ik = -j$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda bu işlem tablosunu yaparsak:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

İşlemin birim elemanı 1 dir. Dolayısıyla

$o(1) = 1$
$o(-1) = 2$
$o(i) = 4$
$o(-i) = 4$
$o(j) = 4$
$o(-j) = 4$
,
$o(k) = 4$
$o(-k) = 4$, bulunur.

b) Alterne grup: S_n simetrik grubunun çift permütasyonlarından oluşan alt grubuna Alterne grup denir. A_8 alterne grubunun mertebesi 4 olan yani eleman sayısı 4 olan bir alt grubunu yazalım.

$A = \{1, (12)(34), (56)(78), (12)(34)(56)(78)\}$ veya

$A^* = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

⋮

farklı örnekler verilebilir.

2) S_9 da $\alpha = (15)(8647)(39) \rightarrow$ zaten ayrık verilmiş

$\beta = (3146782)(59)(738) \rightarrow$ ayrık değil

Önce β'yı ayrık devirlerin çarpımı olarak yazalım.

$\beta = (1467)(23)(59)$ elde edilir.

a) $\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(1)\alpha(4)\alpha(6)\alpha(7))\,(\alpha(2)\alpha(3))\,(\alpha(5)\alpha(9))$
$= (5\ 7\ 4\ 8)\ (2\ 9)\ (1\ 3)$

b) $o(\alpha) = \text{ekok}(2,4,2) = 4$

$o(\beta) = \text{ekok}(4,2,2) = 4$

$\alpha\beta = (175329)(68)$ bulunur.

$o(\alpha\beta) = \text{ekok}(6,2) = 6$

3) a) $8664 = 19.437 + 361$

$437 = 1.361 + 76$

$361 = 4.76 + 57$

$76 = 1.57 + 19$

$57 = 3.19 + 0$

ebob 19 bulunur.

$19 = 76 - 1.57$

$19 = 76 - 1(361 - 4.76)$

$19 = 5.76 - 1.361$

$19 = 5.(437 - 1.361) - 1.361$

$19 = 5.437 - 6.361$

$19 = 5.437 - 6(8664 - 19.437)$

$19 = 119.437 - 6.8664$

$\boxed{x = 119}$ $\boxed{y = -6}$

b) $82^{8285} \equiv x\,(51)$ denkliğinden x'i bulmalıyız

$31^{8285} \equiv x\,(51)$ yazılabilir Euler Teoremine göre $(31,51)=1$

olduğundan $31^{\varphi(51)} \equiv 1\,(51)$ ve $\varphi(51) = \varphi(3).\varphi(17)$
$= 2.16 = 32$

$\boxed{31^{32} \equiv 1\,(51)}$

$31^{8285} \equiv (31^{32})^{258} . 31^{29} \equiv x\,(51)$

$31^{29} \equiv x\,(51)$, her iki tarafı 31^3 ile çarpılırsa

$31^{32} \equiv 31^3 . x\,(51)$ $\quad 31 \equiv -20(51)$, $(-20)^2 = 400 \equiv 43(51)$
$(-20)^3 = -20.43$
$= -860 \equiv 7(51)$

$1 \equiv 7x\,(51)$

$\Rightarrow 7x \equiv 1\,(51)$

$\Rightarrow 51 \mid 7x - 1$

$\Rightarrow 7x - 1 = 51k$

$\Rightarrow 51k \equiv -1\,(7)$

$\Rightarrow 2k \equiv 6\,(7)$

$\Rightarrow k = 3 \quad \Rightarrow 7x - 1 = 51.3$

$\Rightarrow 7x = 154$

$\Rightarrow \boxed{x = 22}$

4) a) $(G,*)$ sonlu yarı grubunda sağdan ve soldan kısaltma özelliği sağlansın. İlgili teoreme göre $(G,*)$ yarı grubunun grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a,b\in G$ için $a*x=b$ ve $y*a=b$ o.ş $\exists x,y\in G$ bulunmasıdır. O halde $a*x=b$ denklemini ele alalım. Bu denklemin G de çözümünün olduğunu göstermeliyiz. $G=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ olsun. G yarı grup olduğundan $a\in G$ için $i=1,2,\dots,n$ için $a*a_i\in G$ dir. Bu durumda

$$\{a*a_1,\dots,a*a_n\}\subseteq G \text{ olur.}$$

$i\neq j$ için $a*a_i=a*a_j$ olsun. Kısaltma özelliğinden $a_i=a_j$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Yani.

$G=\{a*a_1,\dots,a*a_n\}$ dir. $b\in G$ için $b=a*a_k$ o.ş $a_k\in G$ vardır. Bu da $a*x=b$ denkleminin G'de çözümü var demektir. Benzer şekilde $y*a=b$ o.ş $y\in G$ de vardır. O halde $(G,*)$ gruptur.

b) $o(a)=n$ için $o(a^t)=\dfrac{n}{(n,t)}$ olduğunu gösterelim

$o(a^t)=k$ olsun. $a^{tk}=e \Rightarrow n\mid tk$

$\Rightarrow tk=nr,\ r\in\mathbb{Z}$ vardır.

$(n,t)=d$ olsun. $d\mid n \wedge d\mid t \Rightarrow n=dv \wedge t=d.u,\ (u,v)=1$ o.ş $\exists u,v\in\mathbb{Z}$ vardır.

$$tk=nr \Rightarrow du.k=dvr \Rightarrow uk=vr$$
$$\Rightarrow v\mid uk$$
$$\Rightarrow v\mid k$$
$$\overset{n=dv}{\Rightarrow} v=\frac{n}{d}\Big|\, k \quad \text{---(1)---}$$

$$(a^t)^{\frac{n}{d}}=a^{\frac{tn}{d}}=a^{\frac{dun}{d}}=(a^n)^u=e^u=e \quad \text{ve } o(a^t)=k$$

olduğundan $k\mid \dfrac{n}{d}$ ---(2)

(1) ve (2) den $k=\dfrac{n}{d}$. Yani $o(a^t)=\dfrac{n}{(n,t)}$.

5) a) $\left.\begin{array}{l} a \equiv a_1 \ (m) \\ b \equiv b_1 \ (m) \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid a-a_1 \wedge m \mid b-b_1$

$\Rightarrow m \mid b(a-a_1) \wedge m \mid a_1(b-b_1)$

$\Rightarrow m \mid b(a-a_1) + a_1(b-b_1)$

$\Rightarrow m \mid ab - a_1 b + a_1 b - a_1 b_1$

$\Rightarrow m \mid ab - a_1 b_1$

$\Rightarrow ab \equiv a_1 b_1 \ (m)$

b) $(a,m) = (b,m) = 1$ ise $ax + my = 1$ o.ş. $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Her iki tarafı b ile çarparsak

$abx + mby = b$ elde edilir

$(ab, m) = d$ diyelim ve $d = 1$ olduğunu gösterelim.

$d \mid ab \wedge d \mid m \Rightarrow d \mid abx + mby \Rightarrow d \mid b$

$\Rightarrow d \mid b \wedge d \mid m$

$\Rightarrow d \mid (b,m)$

$\Rightarrow d \mid 1$

$\Rightarrow \boxed{d = 1}$